2001 年全国硕士研究生入学统一考试

经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

（1）设生产函数为 $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, 其中 Q 是产出量, L 是劳动投入量, K 是资本投入量,而

A, α, β 均为大于零的参数,则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为__ .

【答】 $-\dfrac{\alpha}{\beta}$

【详解】 当 $Q=1$ 时,有 $K = A^{-\frac{l}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}$,

于是 K 关于 L 的弹性为

$$\xi = L\frac{K'(L)}{K(L)} = L\bullet\frac{-\dfrac{\alpha}{\beta}A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}}{A^{-\frac{1}{\beta}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

（2） 某公司每年的工资总额比上一年增加 20%的基础上再追加 2 百万. 若以 W_t 表示第 t 年的工资总额（单位：百万元），则 W_t 满足的差分方程是___

【答】 $1.2.W_{t-1}+2$

【详解】 $\mathrm{W_t} = (1+0.2)W_{t-1}+2 = 1.2.W_{t-1}+2$

（3）设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, 且秩 $(\boldsymbol{A}) = 3$, 则 $k =$____________.

【答】 -3

【详解】 由题设 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 知必有

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} = (k+3)(k-1)^3 = 0,$$

解得 $k=1$ 或 $k=-3$. 显然 $k=1$ 时 $r(A)=1$,

不符合题意,因此一定有 $k=-3$.

(4) 设随机变量 X,Y 的数学期望都是 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 0.5.则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y|\geq 6\}\leq$______.

【答】 $\frac{1}{12}$

【详解】 另 $Z=X-Y$,则

$$E(Z)=E(X)-E(Y)=0,$$

$$D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$$

$$=1+4-2\cdot 0.5\cdot\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3,$$

于是有

$$P\{|X-Y|\geq 6\}=P\{|Z-E(Z)|\geq 6\}\leq\frac{D(Z)}{6^2}=\frac{1}{12}.$$

(5) 设总体 X 服从正态分布 $N\left(0,0.2^2\right)$,而 $X_1,X_2,\cdots X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

则随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}$ 服从___分布,参数为______。

【答】 $\frac{1}{12}$

【详解】 因为 $X_i\sim N\left(0,2^2\right) i=1,2,\cdots,15.$ 于是 $\frac{X_i}{2}\sim N\left(0,1\right)$, 从而有

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2\left(10\right),\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2\left(5\right),$$

而且由样本的独立性可知, $\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2\left(10\right)$ 与

$\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2\left(5\right)$ 相互独立.

故

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}=\frac{\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2/10}{\left[\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\right]/10}\sim F\left(10,5\right).$$

故 Y 服从第一个自由度为 10,第二个自由度为 5 的 F 分布.

二、选择题

（1）设函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$, 则

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【 】

【答】 [B]

【详解】 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$, 知 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0$, 即 $f'(a)=0$,于是有

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1,$$

即 $f'(a)=0$, $f''(a)=-1$,故 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点,

因此,正确选项为(B).

（2）设函数 $g(x)=\int_0^x f(u)du$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{3}(x-1), 1\le x\le 2\end{cases}$, 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内

(A)无界　　(B）递减　　(C) 不连续　　(D) 连续

【 】

【答】 [D]

【详解】 当 $0\le x<1$ 时,有

$$g(x)=\int_0^x\frac{1}{2}(x^2+1)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x,$$

当 $1\le x\le 2$ 时,有

$$g(x)=\int_0^1\frac{1}{2}(x^2+1)dx+\int_1^x\frac{1}{3}(x-1)dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}(x-1)^2,$$

即 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x, & 0\le x<1\\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}(x-1)^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$

显然 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内连续, 所以,应选(D).

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于______________

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ （B） $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$ (C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$ (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

【 】

【答】 [C]

【详解】 因为 P_1 是单位矩阵交换第一、四列后所得的初等矩阵，而 P_2 是交换第二、三列所得的初等矩阵，于是有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ 从而

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\right)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$$

故正确选项为（C）.

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量.若秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=$ 秩（A），则线性方程组

$(A)\ \boldsymbol{AX}=\alpha$ 必有无穷多解　　　　$(B)\ \boldsymbol{AX}=\alpha$ 必有惟一解.

$(C)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ y \end{pmatrix}=0$ 仅有零解　　$(D)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

【 】

【答】 [D]

【详解】由题设，显然有秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=$ 秩（A）$\le n<n+1$, 即系数矩阵 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$ 非列满秩，因此齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

故正确选项为（D)。

（5）将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

【答】 [A]

【详解】设 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则有 $Y=n-X$,因此 X 和 Y 的相

关系数为 $r=-1$.

三 、(本题满分 8 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数,又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式

确定: $e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\frac{du}{dx}$

【详解】 根据复合函数求导公式,有

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\bullet\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\bullet\frac{dz}{dx}. \qquad (*)$$

由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导,得

$$e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})-(y+x\frac{dy}{dx})=0,$$

即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

由 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$, 两边对 x 求导,得

$$e^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\bullet(1-\frac{dz}{dx}),$$

即 $\frac{dz}{dx}=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}$.

将其代入(*)式,得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+(1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)})\frac{\partial f}{\partial z}.$$

四 、(本题满分 8 分)

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^{x}=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值.

【详解】 因为 $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^{x}=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c.}$

又由拉格朗日中值定理,有

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\bullet 1,$$

于是 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间,于是

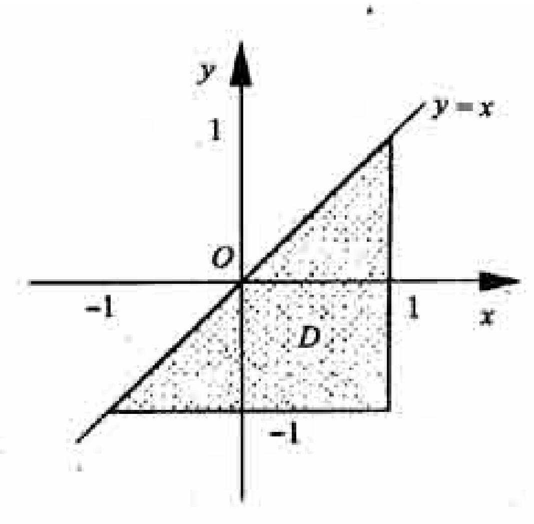
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=e$$

从而$e^{2c}=e$　故$e=\frac{1}{2}$

五 、(本题满分 8 分)

求二重积分$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$的值,其中$D$是由直线$y=x, y=-1$及$x=1$围成的平面区域

【详解 1】　积分区域如图所示



$$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy=\iint\limits_D ydxdy+\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy,$$

其中

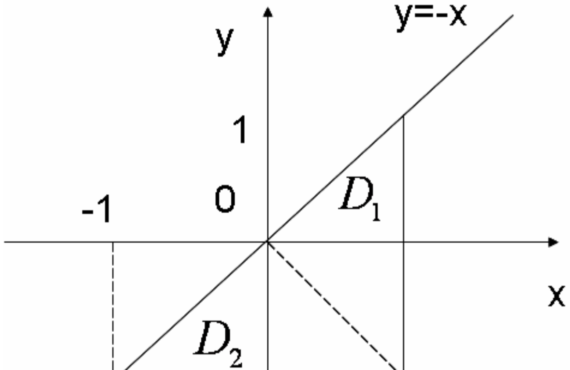
$$\iint\limits_D ydxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{y}^{1}dx=\int_{-1}^{1}y(1-y)dy=-\frac{2}{3};$$

$$\iint\limits_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=\int_{-1}^{1}ydy\int_{y}^{1}xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}y[e^{\frac{1}{2}(1+y^2)}-e^{y^2}]dy=0$$

于是$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy=-\frac{2}{3}$

【详解 2】　如图，$D=D_1+D_2$,,其中D_1关于x轴对称，D_2关于y轴对称，则



$$\iint_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy = \iint_{D_1} y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy + \iint_{D_2} y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]dxdy$$

$$= \iint_{D_1} ydxdy + \iint_{D_2} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy + 0$$

$$= \iint_{D_1} ydxdy + 0 = -\frac{2}{3}.$$

六、 已知抛物线 $y = px^2 + qx$（其中 $p<0, q>0$）在第一象限捏与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

（1） 问 p和q 为何值时，S 达到最大?

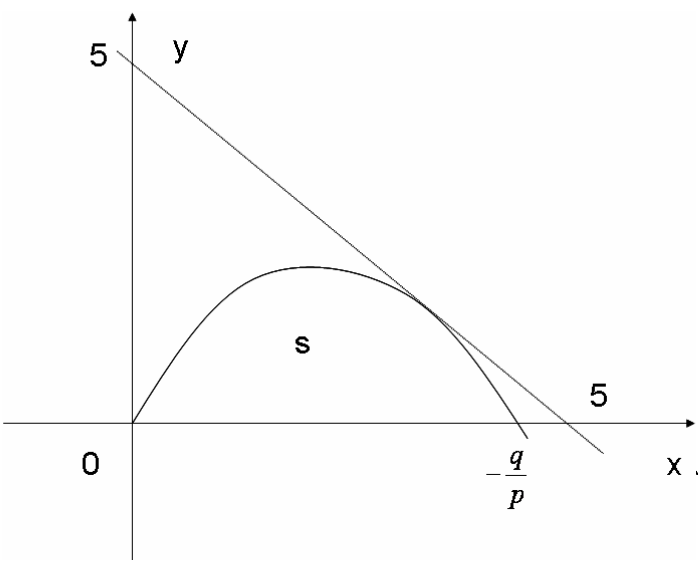
（2）求处此最大值.

【详解】依题意知，抛物线如图所示，求得它与 x 轴交点的横坐标为：

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{q}{p}.$$

面积 S 为

$$S = \int_0^{-\frac{p}{q}} \left(px^2+qx\right)dx = \left(\frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{-\frac{p}{q}} = \frac{q^3}{6q^2}.$$



门有惟一公共点.由方程组

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=px^2+qx \end{cases}$$

得 $y=px^2+(q+1)x-5=0$, 其判别式必为零，即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0, p=-\frac{1}{20}(1+q)^2.$$

将 p 代入 S 中，得

$$S(q)=\frac{200q^3}{3(q+1)^4}.$$

令 $S'(q)=\dfrac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0.$

得驻点 $q=3.$ 当 $1<q<3$ 时，$S'(x)>0;$ $q>3$ 时，$S'(x)<0;$ 当 $q=3$ 时，$S(q)$ 取极大值，即最到值.

此时 $p=-\dfrac{4}{5}$, 从而最大值为 $S=\dfrac{225}{32}$.

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{3}}xe^{1-x}f(x)dx,(k>1).$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=2\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$.

【详解】 由 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx$, 及积分中值定理,知至少存在一点 $\xi\in(0,\dfrac{1}{k})\subset[0,1]$, 使得

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=\xi_1e^{1-\xi_1}f'(\xi_1) \text{ 即 } f(1)e^{-1}=\xi_1e^{-\xi_1}f(\xi_1).$$

在 $[\xi_1,1]$，令 $F(x)=xe^{-x}f(x)$. 那么, $F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 上连续,在 $(\xi_1,1)$ 内可导,且 $F(\xi_1)=F(1)$.

由罗尔中值定理知,至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$, 使得

$$F'(\xi)=e^{-\xi}f(\xi)+\xi e^{-\xi}f'(\xi)=0,,$$

即 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$.

八、已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$ （n 为正整数）且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$, 求函数项级数

$\sum_{i=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$之和.

【详解】 由已知条件可见 $f_n{}'\left(x\right)-f_n\left(x\right)=x^{n-1}e^{x}$,这是以 $f_n\left(x\right)$ 为未知函数的一阶线性非齐次微分方程，其通解为

$$f_n\left(x\right)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^{-\int dx}dx+C\right)=e^{x}\left(\frac{x^n}{n}+C\right),$$

由条件 $f_n\left(1\right)=\frac{e}{n}$,得$C=0$,故 $f_n\left(x\right)=\frac{x^ne^x}{n}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n}=e^x\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

记$s\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,其收敛域为$\left[-1,1\right)$，当$x\in\left(-1,1\right)$时，有

$$s'\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

故

$$s\left(x\right)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln\left(1-x\right).$$

当$x=-1$时，$\sum_{i=1}^{\infty} f_n\left(x\right)=-e^{-1}\ln 2.$

于是，当$-1\le x\le 1$时，有$\sum_{i=1}^{\infty} f_n\left(x\right)=-e^x\ln\left(1-x\right).$

九、（本题满分 13 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$.已知线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有解但不唯一,试求:

(!) a的值;

(2) 正交矩阵 Q,使Q^TAQ为对角矩阵.

【详解】

(1) 对线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的增广矩阵作行初等变换,有.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1\\1&a&1&\vdots&1\\a&1&1&\vdots&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1\\0&a-1&1-a&\vdots&0\\0&0&(a-1)(a+2)&\vdots&a+2\end{bmatrix}.$$

因为方程组 $\boldsymbol{AX}=\beta$ 有解但不唯一,所以 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$, 故 $a=-2$.

(2) 由(1),有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3).$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0.$

对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$$

由于他们是三个不同特征值的特征向量,因此相互正交,将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T,\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T.$$

令 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$

则有 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$

十、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，秩（A）=n， A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，二次型

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{A}x_ix_j.$$

（1） 记 $\boldsymbol{A}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$,把 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{A}x_ix_j$.写成矩阵形式，并证

明二次型 $f\left(\boldsymbol{X}\right)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2)　　二次型 $g\left(\boldsymbol{X}\right)=\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f\left(\boldsymbol{X}\right)$ 的规范形是否相同？说明理由.

【详解】　(1)　二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的矩阵形式为

$$f\left(\boldsymbol{X}\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

因秩（A）=n，A 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|A|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

又因为 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}=\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,可见 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称矩阵,因此二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的对称矩阵形式为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2)　因为 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，于是 $g\left(\boldsymbol{X}\right)=\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f\left(\boldsymbol{X}\right)$ 有相同的规范形.

十一、(本题满分 8 分)

生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的,假设每箱平均重 50 千克,标准差为 5 千克.若用最大载重量为 5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于 0.977. $(\Phi(2)=0.977$,其中$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数).

【详解】　设 $X_i(i=1,2,\cdots n)$ 是装运的第 i 箱的重量(单位:千克), n 是所求箱数.由题设可以将 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 视为独立同分布的随机变量,而 n 箱的总重量

$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是独立同分布随机变量之和.

由题设,有 $E(X_i)=50,\sqrt{D(X_i)}=5;E(S_n)=50n,\sqrt{D(S_n)}=5\sqrt{n}$ (单位:千克)

根据列维—林德柏格中心极限定理,知 S_n 近似服从正泰分布 $N(50n,25n)$ 而箱数 n 根据下述条件确定

$$P\{S_n\le 5000\}=P\{\frac{S_n-50n}{5\sqrt{n}}\le\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\}$$

$$\approx \Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}) > 0.977 = \Phi(2)$$

由此得 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2$,

从而$n < 98.0199$,即最多可以装 98 箱.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 对联和分布是正方形$G = \{(x, y) | 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3\}$上的均匀分布,试求随机变量$U = \{X - Y\}$的概率密度 $p(u)$.

【详解】 由题设条件知,X 和 Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

以 $F(u) = P\{U \le u\}, (-\infty < u < \infty)$ 表示随机变量U 的分布函数.显然,当 $u \le 0$ 时,$F(u) = 0$;当$u \ge 2$ 时,$F(u) = 1$.

设$0 < u < 2$,则

$$F(u) = \iint\limits_{|x-y| \le u} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{|x-y| \le u} \frac{1}{2} dxdy = \frac{1}{4}\left[4 - (2-u)^2\right] = 1 - \frac{1}{4}(2-u)^2$$

于是随机变量 U 的概率密度为

$$\rho(u) = F'(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$