1998 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

（1） 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=$ ______.

【答】 e^{-1}

【详解】 因为

$$\frac{df(x)}{dx}=nx^{n-1},\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=1}=n,$$

故过 $(1,1)$ 的切线方程为 $y-1=n(x-1)$.

当 $y=0$ 时，得

$$\xi_n=x=1-\frac{1}{n},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

（2） $\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx=$ ______

【答】 $-\frac{\ln x}{x}+C$

【详解】

$$\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx=\int(\ln x-1)d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}(\ln x-1)+\int\frac{1}{x}d(\ln x-1)$$

$$=-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+C$$

$$=-\frac{\ln x}{x}+C.$$

（3） 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为______

【答】 $y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right).$

【详解】 差分方程可化为标准形式：

$$y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t,$$

其通解为

$$y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right).$$

（4） 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{B} =$________________

【答】 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

【详解 1】 将已知矩阵方程组两边分别左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}(8\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{-1},$$

化简有

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - 8\boldsymbol{E}.$$

又

$$|\boldsymbol{A}| = -2,$$

因此 $$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{E}.$$

于是

$$\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{-1} = 4\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= 4\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【详解 2】 对 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$ 两边分别左乘 $\boldsymbol{A}$，分别右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 以及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - 8\boldsymbol{E}.$$

因此，

$$\boldsymbol{B} = 8\left(2\boldsymbol{A} - |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)^{-1}.$$

而

$$\left(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&&\\&-2&\\&&4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=8\begin{bmatrix}4&&\\&-2&\\&&4\end{bmatrix}^{-1}=8\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&&\\&-\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&3\end{bmatrix}.$$

【详解 2】 由已知矩阵方程得

$$\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{E}$$

两边分别左乘$\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$，右乘$\boldsymbol{A}^{-1}$得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=8\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=8\left[\boldsymbol{A}\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)\right]^{-1}=8\left(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\\&=8\left(2\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)^{-1}=8\left(2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right)^{-1}\\&=8\cdot\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

（5） 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N\left(0,2^2\right)$ 的简单随机样本，$X=a\left(X_1-2X_2\right)^2+b\left(3X_3-4X_4\right)^2$,则当$a=$__________,$b=$________时，统计量$X$服从$\chi^2$分布，其自由度为__________.

【答】 $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{100}$ 2

【详解 1】 即X服从χ^2分布，则$n=2$，且须

$$\sqrt{a}\left(X_1-2X_2\right)\sim N(0,1);\sqrt{b}\left(3X_3-4X_4\right)\sim N(0,1).$$

于是

$$E\left(X_1-2X_2\right)=E\left(X_1\right)-2E\left(X_2\right)=0,$$

$$D\left(X_1-2X_2\right)=D\left(X_1\right)+4D\left(X_2\right)=20,$$

$$E\left(3X_3-4X_4\right)=3E\left(X_3\right)-4E\left(X_4\right)=0,$$

$$D\left(3X_3-4X_4\right)=9E\left(X_3\right)+16E\left(X_4\right)=100,$$

于是 $\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1),$

且相互独立，由 χ^2 分布的构成知：

$$X=\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(2),$$

所以当 $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$ 时，X 服从 χ^2 分布，其自由度为 2.

二、选择题

(1) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4.又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1,$ 则曲线

$y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

$(A)\frac{1}{2}.$ $(B)0.$ $(C)-1.$ $(D)-2.$

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 由已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1,$$

于是

$$f'(1)=-2.$$

又

$$f(x+4)=f(x),$$

两边求导得

$$f'(x+4)=f'(x),$$

故

$$f(5)=f(1)=-2.$$

即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率 $f'(5)=-2.$

(2) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为

(A) 不存在间断点. (B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$ (D) 存在间断点 $x=-1$.

【 】

【答】 应选 (B)

【详解】 由于

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x>1,\\ -1, & x=0,\\ 1+x, & x<1.\end{cases}$$

可见，$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

(3) 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$，若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},$ 则

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0.$ (B) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

(C) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0.$ (D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0.$

【 】

【答】 应选 (C)

【详解 1】 由题设条件： $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O},$ 存在非零解，于是 $|\boldsymbol{A}|=0,$

即

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda=1$.

于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},$ 知道 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{O}.$

故方程组 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=0$ 存在非零解,于是 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}^T|=0.$

【详解 2】 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},$

所以

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq 3.$$

又因为

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O},$$

所以

$$1 \leq r(\boldsymbol{A}) < 3, 1 \leq r(\boldsymbol{B}) < 3.$$

故$|\boldsymbol{B}| = 0$

又因为$\lambda = -2$时，

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9,$$

即此时$r(\boldsymbol{A}) = 3.$

故应选(C)

事实上，当$\lambda = 1$时，$r(\boldsymbol{A}) = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.$

（4） 设$n(n \geq 3)$阶矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，若矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$n-1$，则$a$必为

$(A)1.$ $(B)\frac{1}{1-n}.$ $(C)-1.$ $(D)\frac{1}{n-1}.$

【 】

【答】 应选(B)

【详解 1】由题设秩$r(\boldsymbol{A}) = n-1,$必有$|\boldsymbol{A}| = 0,$又

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (n-1)a+1 & (n-1)a+1 & (n-1)a+1 & \cdots & (n-1)a+1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left[(n-1)a+1\right]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}=\left[(n-1)a+1\right]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1-a\end{vmatrix}$$

$$=(1-a)^n\left[(n-1)a+1\right],$$

可见$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，必有$a=1$或$a=\dfrac{1}{1-n}$.

但$a=1$时，显然$r(\boldsymbol{A})=1,$与题设矛盾，故必有$a=\dfrac{1}{1-n}$..

【详解 2】 因题对$n\geq 3$的一切正整数n选项恒惟一确定，故对$n=3$时的正确选项即为所求.

此时$r(\boldsymbol{A})=2,$所以$a\neq 1.$对$\boldsymbol{A}$进行初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1-a&0&a\\0&1-a&a\\a-1&a-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1-a&0&a\\0&1-a&a\\0&0&1+2a\end{bmatrix}$$

因而$r(\boldsymbol{A})=2,$所以$1+2a=0.$

即

$$a=-\frac{1}{2}=\frac{1}{1-3}.$$

故应选(B).

(5) 设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为随机变量X_1与X_2的分布函数.为使

$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$是某以随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取

$(A)\,a=\dfrac{3}{5},b=-\dfrac{2}{5}.$ $(B)\,a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{2}{3}.$

$(C)\,a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{2}{3}.$ $(D)\,a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{3}{2}.$

【 】

【答】 应选(A)

【详解】 根据分布函数的性质：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1,$因此有

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=a\lim_{x\to+\infty}F_1(x)-b\lim_{x\to+\infty}F_2(x),\text{即}1=a-b.$$

对比四个选项知，只有(A)中的a和b值满足$a-b=1.$

三、设 $z=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【详解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}-\left(x^2+y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\left(2x+y\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}-\left(x^2+y^2\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]\frac{1}{x}=\left(2y-x\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

所以

$$dz=e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[\left(2x+y\right)dx+\left(2y-x\right)dy\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}-\left(2x+y\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]\frac{1}{x}=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

四、 设 $D=\left\{\left(x,y\right)\mid x^2+y^2\le x\right\}$，求 $\iint\limits_D\sqrt{x}dxdy$.

【详解 1】

$$\iint\limits_D\sqrt{x}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}rdr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta\int_0^{\cos\theta}r^{\frac{3}{2}}dr=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{8}{15}.$$

【详解 2】 $D=\left\{\left(x,y\right)\mid 0\le x\le 1,-\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{x-x^2}\right\}$,

所以

$$\iint\limits_D\sqrt{x}dxdy=\int_0^1\sqrt{x}dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}dy=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx\ \xlongequal{\sqrt{1-x}=t}$$

$$4\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)dt=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15}.$$

五、设某酒厂有一批新酿的好酒，如果先在（假定 $t=0$）就售出，总收入为 R_0（元）.如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为

$$R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$$

假定银行的年利率为r，并以连续复利计算试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大.并求$r=0.06$时的t值.

【详解】 根据连续复利公式，这批酒再窖藏 t 年末售出总收入 R 的现值为$A(t)=\mathrm{Re}^{-n}$,而

$R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，所以

$$A(t)=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-n}.$$

令

$$\frac{dA}{dt}=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-nt}\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)^2-\frac{1}{10\sqrt{t^3}}\right],$$

则有

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=t_0}=R_0e^{\frac{1}{25r}}\left(-12.5r^3\right)<0.$$

于是，$t_0=\frac{1}{25r^2}$是极大值点即最大值点，故窖藏$t=\frac{1}{25r^2}$（年）售出，总收入的现值最大。当$r=0.06$时，$t=\frac{100}{9}\approx 11$（年）.

六、 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq 0$.试证存在$\xi,\eta\in(a,b)$,使得$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

【详解 1】 由拉个朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

把上式代入要证的关系式

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

转化为只需证明

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^{\eta\cdot}}$$

显然，只需对$f(x),g(x)=e^x$在$[a,b]$上应用柯西中值定理即可.

【详解 2】 令$\xi=\eta$,要证结论即为

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi},$$

令 $g\left(x\right)=e^x$ 在 $\left[a,b\right]$ 上应用拉个朗日中值定理即得结论.

七、 设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=\left(n+1\right)x^2+\frac{1}{n+1}$, 记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

（1） 求这两台抛物线所围成的平面图形的面积 S_n;

（2） 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

【详解】 解联立方程

$$\begin{cases} y=nx^2+\dfrac{1}{n}, \\ y=\left(n+1\right)x^2+\dfrac{1}{n+1}, \end{cases}$$

得

$$x^2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\left(n+1\right)},$$

从而

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n\left(n+1\right)}}.$$

因图形关于 y 轴对称，所以

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-\left(n+1\right)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n\left(n+1\right)}-x^2\right]dx$$

$$=\frac{4}{3}\frac{1}{n\left(n+1\right)\sqrt{n\left(n+1\right)}},$$

因此

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right),$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{4}{3}.$$

八、 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1, x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}\left[t^2 f(t)-f(1)\right].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\Big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

【详解】 依题意得

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)dx=\frac{\pi}{3}\left[t^2 f(t)-f(1)\right],$$

即

$$3\int_1^t f^2(x)dx=t^2 f(t)-f(1).$$

两边对 t 求导，得

$$3f^2 t=2tf(t)+t^2 f'(t),$$

将上式改写为

$$x^2 f'=3y^2-2xy,$$

即

$$\frac{dy}{dx}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\cdot\frac{y}{x}. \qquad (*)$$

令

$$\frac{y}{x}=u,$$

则有

$$x\frac{du}{dx}=3u(u-1,)$$

当 $u\neq 0, u\neq 1$ 时，有

$$\frac{du}{u(u-1)}=\frac{3dx}{x},$$

两边积分得

$$\frac{u-1}{u}=Cx^3.$$

从而 $(*)$ 式的通解为 $y-x=Cx^3y$ （C 为任意常数）.

由已知条件，求得 $C=-1,$ 从而求的通解为

$$y-x=-x^3y.$$

九、设向量$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots a_n\right)^T$，$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots b_n\right)^T$都是非零向量，且满足条件$\alpha^T\beta=0$，记$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=\alpha^T\beta$. 求：

（1）$\boldsymbol{A}^2$;

（2）矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量.

【详解】（1）由$\boldsymbol{A}=\alpha^T\beta$.和$\alpha^T\beta=0$，有

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\left(\alpha^T\beta\right)\left(\alpha^T\beta\right)=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)\beta^T=\left(\beta^T\alpha\right)\alpha\beta^T=\left(\alpha^T\beta\right)\alpha\beta^T=\boldsymbol{O}.$$

即$\boldsymbol{A}$为n阶零矩阵.

（2）设λ为n阶矩阵的任一特征值，n阶矩阵的属于特征值λ的特征向量为$x\left(x\neq 0\right)$，

则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$,

于是$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$.

因为$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,所以$\lambda^2\boldsymbol{x}=0$.因为$\boldsymbol{x}\neq 0$，故$\lambda=0$,即矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全为零.

不妨设向量α,β中分量$a_1\neq 0,b_1\neq 0$,对齐次线性方程组$\left(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=0$的系数矩阵施以初等行变换：

$$-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

由此可得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^T\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^T,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^T,$$

于是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为

$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\left(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\text{是不全为零的任意常数}\right)$.

十、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{B}=\left(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)^2$.其中$k$为实数,$\boldsymbol{E}$为单位矩阵.对角矩阵$\boldsymbol{A}$，使得$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$相似，并求$k$为何值时，$\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

【详解 1】 由于

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0.$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值， $\boldsymbol{x}\neq 0$ 为相应的特征向量，

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda \boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{k}+\lambda)^2\boldsymbol{x},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $(k+\lambda)^2,(k+\lambda)^2,k^2$. 又因为 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，从而可以对角化，由此可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(k+\lambda)^2 & & \\ & (k+\lambda)^2 & \\ & & k^2\end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}.$

由上面的结果立刻可得：当 $k\neq-2,k\neq 0$ 时， $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值全大于零，这时 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

【详解 2】 由

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0,$$

可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0.$

记对角矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}\text{ 即 }\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^T,$$

从而

$$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=(k\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T+\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^T)^2=\left[\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^T\right]^2$$

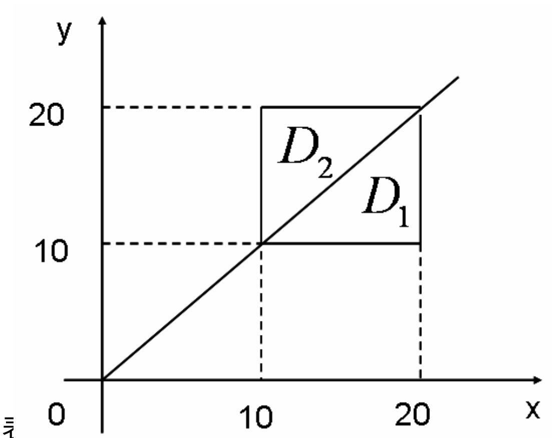
$$=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D})^2\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}(k+\lambda)^2 & & \\ & (k+\lambda)^2 & \\ & & k^2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^T,$$

$$\boldsymbol{B} \sim \wedge = \begin{bmatrix} (k+\lambda)^2 & & \\ & (k+\lambda)^2 & \\ & & k^2 \end{bmatrix},$$

当 $k \neq -2, k \neq 0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的所有特征值全大于零，这是 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

十一、 一商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布.商店每售出一单位商品柯以得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元.试计算此商店每周所得利润的期望值.

【详解】



设 Z 表

$$Z = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X, \\ 1000X + 500(Y - X) = 500(X + Y), & Y > X. \end{cases}$$

由于 Y 与 X 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$E(Z) = \iint\limits_{D_1} 1000y \times \frac{1}{100} dxdy + \iint\limits_{D_2} 500(x+y) \times \frac{1}{100} dxdy$$

$$= 10\int_{10}^{20} dy \int_{y}^{20} ydx + 5\int_{10}^{20} dy \int_{10}^{y} (x+y) dx$$

$$= 10\int_{10}^{20} y(20-y) dy + 5\int_{10}^{20} \left(\frac{3}{2}y^2 - 10y - 50 \right) dy$$

$$= \frac{20000}{3} + 5 \times 100 \approx 14166.67(\text{元}).$$

十二、 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份.随机地取一个地区的报名表，从先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p;

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

【详解】 设

$$H_i = \left\{报名表是的i考区考生的\right\}\left(i=1,2,3\right),$$
$$H_j = \left\{第j次抽到的报名表是男生表\right\}\left(j=1,2\right),$$

则

$$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=P\left(H_3\right)=\frac{1}{3},$$
$$P\left(A_1 \mid H_1\right)=\frac{7}{10}, P\left(A_1 \mid H_2\right)=\frac{8}{15}, P\left(A_1 \mid H_3\right)=\frac{20}{25}.$$

(1) 由全概率公式得：

$$p=P\left(\overline{A_1}\right)=\sum_{i=1}^{3} P\left(H_i\right) P\left(\overline{A_1} \mid H_i\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2) 由全概率公式得：

$$P\left(A_2 \mid H_1\right)=\frac{7}{10}, P\left(A_2 \mid H_2\right)=\frac{8}{15}, P\left(A_2 \mid H_3\right)=\frac{20}{25},$$
$$P\left(\overline{A_1} A_2 \mid H_1\right)=\frac{7}{30}, P\left(\overline{A_1} A_2 \mid H_2\right)=\frac{8}{30}, P\left(\overline{A_1} A_2 \mid H_{13}\right)=\frac{5}{30},$$
$$P\left(A_2\right)=\sum_{i=1}^{3} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A_2 \mid H_i\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

$$P\left(\overline{A_1} A_2\right)=\sum_{i=1}^{3} P\left(H_i\right) P\left(\overline{A_1} A_2 \mid H_i\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}.$$

因此 $q=P\left(\overline{A_1} \mid A_2\right)=P\left(\overline{A_1} A_2\right) / P\left(A_2\right)=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\dfrac{20}{61}$